GÉOMÉTRIE. — Un problème variationnel sans compacité dans la géométrie de contact.

Note de **Abbas Bahri**, présentée par Paul Malliavin.

Reçue le 19 juillet 1984.

Soit α une forme de contact sur une variété M compacte, de dimension trois. Soit ξ le champ de Reeb de α et v un champ dans le noyau de α. Le long d'orbites de v, on définit une notion de conjugaison de points relativement à la forme α. Sous des hypothèses convenables sur α et v, on prouve l'existence d'orbites fermées de ξ, modulo des sauts entre des points conjugués. L'existence de ces courbes s'obtient par des méthodes variationnelles où la condition de Palais-Smale est violée. On développe, en conséquence, des techniques adaptées à l'étude de points critiques à l'infini.

GEOMETRY. — A Variational Problem Without Compacity in Contact Geometry.

Let α be a contact form on a compact three dimensional manifold M. *Let ξ be the Reeb vector-field of α and v be a field in the kernel of α. Along v-orbits, we define conjugate points with respect to the form α. Under suitable hypotheses on α and v, we prove the existence of closed orbits of ξ, up to a certain number of jumps between conjugate points. The existence of such curves is obtained through variational methods where the Palais-Smale condition does not hold. We are thus led to develop suitable techniques for the study of critical points at infinity.*

Les démonstrations sont renvoyées à l'article à paraître (A. Bahri [1]).

1. Une propriété des formes de contact. — On se donne une forme de contact α sur une variété compacte M de dimension trois orientée. On suppose par exemple que :

$$\alpha \wedge d\alpha > 0. \tag{1}$$

Soient ξ le champ de Reeb de α et v un champ dans le noyau de α partout non singulier. L'existence d'un tel v signifie que le fibré en α au-dessus de M est trivialisable, ce que nous supposerons.

Soit θ_s le groupe à un paramètre engendré par v, $\mathrm{D}\,\theta_s$ sa différentielle et soit θ_s^* la transformation associée sur les formes différentielles de M.

Soient x_0 un point de M et $x_s=\theta_s(x_0)$ le point générique de l'orbite de v issue de x_0. Soient $e_1(0)$ et $e_2(0)$ deux vecteurs tangents à M en x_0 tels que :

$$\alpha \wedge d\alpha\,(v_{x_0},\, e_1(0),\, e_2(0)) > 0. \tag{2}$$

Soit :

$$e_1(s)=\mathrm{D}\,\theta_s(e_1(0));\quad e_2(s)=\mathrm{D}\,\theta_s(e_2(0));\quad w(s)=\alpha(e_1(s))\,e_2(s)-\alpha(e_2(s))\,e_1(s). \tag{3}$$

La proposition suivante traduit le long des orbites de v le fait que α est une forme de contact.

Proposition 1. — *$w(s)$ tourne dans le sens direct du repère $(e_1(s), e_2(s))$ quand s augmente.*

Remarque 1. — Si α était un feuilletage, α_{x_0} et $(\theta_s^*\alpha)_{x_0}$ coïncideraient toujours et $w(s)$ ne tournerait pas. La proposition 1 caractérise donc, dans ce sens, les formes de contact. Elle a été utilisée par D. Bennequin [2] pour prouver que certaines hypersurfaces étoilées de $\mathbb{R}^{2n}$ ne pouvaient pas être ramenées par une transformation symplectique à une hypersurface convexe.

Soit $\psi(s, x_0)$ l'angle, dans le repère mobile $(e_1(s), e_2(s))$ dont a tourné $w(s)$ de 0 à s.

On introduit les :

Définition 1. — On appelle points de coïncidence de x_0 (relativement à α et v) le long de l'orbite de v issue de x_0 les points x_s tels que $\psi(s, x_0)=2k\pi$; $k\in\mathbb{Z}$. En ces points x_s,

0249-6321/84/02990757 $ 2.00

on a :

(4) $$(\theta_s^* \alpha)_{x_0} = \lambda(s, x_0)\,\alpha_{x_0}; \qquad \lambda(s, x_0) > 0.$$

DÉFINITION 2. — On appelle point conjugué de x_0 (relativement à α et v) le long de l'orbite de v issue de x_0, un point x_s de coïncidence de x_0 tel que :

(5) $$\lambda(s, x_0) = 1.$$

DÉFINITION 3. — On dit que α tourne bien le long de v si tout point x_0 de M admet un point de coïncidence autre que lui-même. Soit alors γ^i : $M \to \mathbb{R}$ la fonction qui associe à un point x_0 de M le i-ième-temps $s = \gamma^i(x_0)$ tel que x_s soit un point de coïncidence de x_0 ($i \in \mathbb{Z}$). Soit f^i : $M \to M$ le difféomorphisme de M qui envoie x_0 sur $x_{\gamma^i(x_0)}$. On note $\mu_i(x_0)$ le coefficient de colinéarité de $(\theta^*_{\gamma^i(x_0)} \alpha)_{x_0}$ et de α_{x_0} :

(6) $$(\theta^*_{\gamma^i(x_0)} \alpha)_{x_0} = \mu_i(x_0)\,\alpha_{x_0}.$$

2. LA FORME β. — Soit β la forme différentielle sur M définie par :

(7) $$\beta = d\alpha(v, .),$$

On suppose :

(8) $$\beta \wedge d\beta > 0.$$

La signification de cette hypothèse peut être dégagée dans le formalisme hamiltonien de $\mathbb{R}^4$.

Soit $\alpha_0 = \sum_{i=1}^{2} (x_i\,dy_i - y_i\,dx_i)$ la structure standard de $S^3 \subset \mathbb{R}^4$. Soit v un champ dans le noyau de α_0 définissant une des fibrations de Hopf de S^3. Soit $\alpha = \lambda\alpha_0$, $\lambda \in C^2(S^3, \mathbb{R}^+_*)$ et $\beta = d\alpha(v, .)$.

PROPOSITION 2. — *Si l'hypersurface* $\sum = \{ z = \lambda(x)\,x;\ x \in S^3 \}$ *borde un ouvert convexe,* $\beta \wedge d\beta$ *est positif.*

Remarque 2. — La proposition 3 a aussi été utilisée par D. Bennequin pour le résultat cité dans la remarque 1 (*voir* [2]).

Dans le cadre général d'une forme β de $T^* M$, on peut introduire l'espace des courbes de M suivant :

(9) $$L_\beta = \{ x \in H^1(S^1, M);\ \beta(\dot{x}) \equiv 0 \},$$

$H^1(S^1, M)$ désigne l'espace des courbes fermées H^1 de M.

Si β est de contact, la topologie de L_β a été étudiée par S. Smale [3] et W. Boothby [4]. La proposition suivante améliore légèrement leur résultat :

Soit $F = \{ x \in M / \beta \wedge d\beta = 0 \}$.

PROPOSITION 3. — *On suppose que* F *est une sous-variété de codimension* 1 *de* M *et que, en tout point* x *de* F, β *est transverse à* F. *Alors* L_β *a la topologie de l'espace* $H^1(S^1, M)$.

3. LE RÉSULTAT PRINCIPAL. — On normalise v pour que :

(10) $$\beta \wedge d\beta = \alpha \wedge d\alpha > 0.$$

On introduit :

(11) $\Gamma = \{ x_0 \in M / \lambda(s, x_0) \geqq 1$ pour tout s tel que x_s soit un point de coïncidence de $x_0 \}$.

Soit d une distance sur M et soit $\| . \|$ une norme pour les différentielles des applications C^1 de M dans M.

On suppose que :

(H 1) α tourne bien le long de v.

(H 2) v admet une orbite périodique.

(H 3) Pour *un* champ v_1, non singulier et colinéaire à v, on a :
$\exists k_1 > 0$ tel que $\| D\theta_s^1 \| \leqq k_1$, $\forall s \in \mathbb{R}$; où θ_s^1 est le groupe à un paramètre de v_1.

(H 4) $\exists k_2$ et $k_3 > 0$ tels que $\forall i \in \mathbb{Z}$, on a :

$$k_2 d(x, y) \leqq d(f^i(x), f^i(y)) \leqq k_3 d(x, y), \qquad \forall x, y \in \mathrm{M}.$$

(H 5) $\exists k_4 > 0$ tel que : $|\mu_i(x) - \mu_i(y)| \leqq k_4 d(x, y)$, $\forall x, y \in \mathrm{M}$.

(H 6) $\exists \rho > 0$ tel que $\forall x \in \mathrm{M}$, l'ensemble $\mathrm{C}_\rho(x) = \{ f^i(x) / |\mu_i(x) - 1| < \rho;\ i \in \mathbb{Z} \}$ est fini.

Sous ces hypothèses, on a le :

THÉORÈME 1. — *Il existe une courbe x sur* M, *continue et fermée constituée de morceaux* (x_{2i}, x_{2i+1}) *tangents à* ξ *et de morceaux* (x_{2i+1}, x_{2i+2}) *tangents à* v. x_{2i+2} *est conjugué de* x_{2i+1}. *Les morceaux tangents à* ξ *sont dans* Γ. *Si la topologie de l'espace des chemins est assez riche* (*i. e. les nombres de Betti de cet espace sont non bornés*), *il y a une infinité de telles courbes. De plus, si n désigne le nombre de morceaux d'une telle courbe et a sa longueur selon* ξ, *on a :*

$$n \leqq \mathrm{C}\, a; \quad \text{C constante fixée.} \tag{12}$$

Remarque 3. — Les hypothèses (H 1)-(H 6) peuvent être considérablement affaiblies, tout particulièrement (H 3), (H 4) et (H 5). (*Voir* [1].) ■

4. LES TECHNIQUES. — On considère l'espace $\mathrm{C}_\beta = \{ x \in \mathrm{L}_\beta / \alpha(\dot{x}) \equiv \text{constante positive} \}$; C_β est une sous-variété de $\mathrm{H}^1(\mathrm{S}^1, \mathrm{M})$ dont on peut étudier la topologie en utilisant les résultats de S. Smale et W. Boothby déjà cités ou encore la proposition 3.

Les courbes de C_β ont un vecteur directeur $\dot{x}$ qui se décompose comme suit :

$$\dot{x} = a\xi + bv, \qquad a = \text{constante positive}; \quad b \in \mathrm{L}^2(\mathrm{S}^1, \mathbb{R}). \tag{13}$$

On considère la fonctionnelle $\mathrm{J}(x) = a$ sur C_β. Soit $\mathrm{I}(x) = \int_0^1 b^2\, dt$. La fonctionnelle J ne vérifie pas la condition de Palais-Smale pour des raisons intrinsèques au problème, expliquées dans [1]. Il y a des points critiques à l'infini, dont il faut faire l'étude.

On commence donc par construire un pseudo-gradient, dépendant d'un paramètre $\varepsilon > 0$. Les détails de cette construction sont dans [1]. L'idée est la suivante :

Soit $\partial \mathrm{I}$ et $\partial \mathrm{J}$ les gradients de I et J, $|\partial \mathrm{I}|$ et $|\partial \mathrm{J}|$ leurs normes. Soient :

(14) $\varphi : \mathrm{C}_\beta - \{\text{points critiques de J}\} \to \overline{\mathbb{R}}$ définie par :

$$\varphi(x) = \frac{|\partial \mathrm{J}|}{|\partial \mathrm{I}|}(x)\, \mathrm{I}(x) \quad \text{si} \quad |\partial \mathrm{I}(x)| \neq 0, \qquad \varphi(x) = +\infty \quad \text{si} \quad \partial \mathrm{I}(x) = 0;$$

$$\mathrm{Z} = |\partial \mathrm{J}|\, \partial \mathrm{I} + |\partial \mathrm{I}|\, \partial \mathrm{J}. \tag{15}$$

On construit un pseudo-gradient Z_ε, dépendant d'un paramètre $\varepsilon \leqq 0$, qui est colinéaire à $-\mathrm{Z}(x)$ quand $\varphi(x) \leqq \varepsilon$ et colinéaire à $-\partial \mathrm{J}(x)$ quand $\varphi(x) \geqq 2\varepsilon$. On en déduit la :

PROPOSITION 4. — *Soit* $0 < a_0 < a_1$; $\mathrm{J}^{a_0} = \{ x \in \mathrm{C}_\beta / \mathrm{J}(x) \leqq a_0 \}$; $\mathrm{J}^{a_1} = \{ x \in \mathrm{C}_\beta / \mathrm{J}(x) \leqq a_1 \}$. *Si* J^{a_0} *n'est pas retract par déformation de* J^{a_1}, *il existe un point* x_ε *tel que :*

$$a_0 \leqq \mathrm{J}(x_\varepsilon) \leqq a_1; \qquad \partial \mathrm{J}(x_\varepsilon) = 0, \tag{16}$$

ou :

$$a_0 \leqq \mathrm{J}(x_\varepsilon) \leqq a_1; \qquad \mathrm{Z}(x_\varepsilon) = 0 \quad \textit{et} \quad \varphi(x_\varepsilon) \leqq \varepsilon. \tag{17}$$

On explore l'alternative fournie par la proposition 4. Dans le cas (16), le théorème est prouvé. On explicite donc (17). On pose :

$$(18)\quad \begin{cases} \omega = \dfrac{|\partial \mathrm{I}|}{|\partial \mathrm{J}|}(x); \quad \omega \to +\infty \text{ quand } \varepsilon \to 0, \\ \dot{x}_\varepsilon = a\,\xi + bv, \quad 0 < a_0 \leqq a \leqq a_1; \qquad b \in \mathrm{L}^2(\mathrm{S}^1, \mathbb{R}), \\ \tau,\ \bar{\mu} \text{ et } \bar{\mu}_\xi \text{ sont des fonctions sur M dépendant de } \alpha \text{ et } v. \end{cases}$$

(17) s'écrit alors :

$$(19)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2 b}{dt^2} + b\left(-\omega\, a + \dfrac{b^2}{2} - \displaystyle\int_0^1 b^2/2\right) + a^2\, b\,\tau - ab^2\,\bar{\mu}_\xi + \bar{\mu}\, b\,\dfrac{db}{dt} = 0, \\ b(0) = b(1); \quad \dfrac{db}{dt}(0) = \dfrac{db}{dt}(1); \qquad 0 \leqq a_0 \leqq a \leqq a_1; \qquad \displaystyle\int_0^1 b^2/\omega \leqq \varepsilon. \end{cases}$$

L'analyse de (19) est délicate parce que $\bar{\mu}$, $\bar{\mu}_\xi$ et τ changent de signe sur M. Il faut distinguer deux types d'intervalles de temps :

1° ceux où $b^2/\omega(t)$ est « petit ». On prouve que sur un tel intervalle $[t, t+\Delta t]$, la courbe est proche d'une orbite de ξ à l'ordre $o(\Delta t)$;

2° ceux où $b^2/\omega(t)$ est « grand ». Sur ces morceaux, la courbe est proche d'une orbite de v. On écrit alors l'équation fonction de s qui vérifie la forme α_{x_0} dans le repère transporté par v, $((\theta_s^*\,\alpha)_{x_0}, (\theta_s^*\,\beta)_{x_0})$, le long d'un orbite x_s de v. Cette équation nous permet d'interpréter (19) comme équation de transport de α le long de v. La condition $\int_0^1 b^2/\omega \leqq \varepsilon$ nous dit alors que, pour $\varepsilon \to 0$, les morceaux considérés doivent aller d'un point à un de ses conjugués. L'erreur est ici encore de l'ordre $o(\Delta t)$.

On remplace donc, en suivant le découpage fourni par 1°-2°, la courbe considérée par une courbe $\tilde{x}_\varepsilon$ constituée d'orbites de ξ et d'orbites de v, respectivement. (Les orbites de v allant d'un point à un de ses conjugués.) $\tilde{x}_\varepsilon(0)$ et $\tilde{x}_\varepsilon(1)$ sont proches à $o(1)$. On contrôle alors, par des estimations délicates, le nombre de brins de cette courbe. On conclut en faisant tendre ε vers zéro.

La preuve du fait que les morceaux tangents à ξ sont dans Γ représente une démonstration à part qui nécessite la construction d'un pseudo-gradient local. On conclut en attribuant un indice de Morse et des variétés stables et instables à ces points critiques à l'infini, ce qui permet par un raisonnement analogue au cas des géodésiques d'établir que si la topologie est assez riche, il y a une infinité de telles courbes.

Références bibliographiques

[1] A. Bahri, *Pseudo-orbites des formes de contact* (à paraître).
[2] D. Bennequin, Quelques remarques sur la rigidité symplectique. *Séminaire Sud-Rhodanien de Géométrie III. Géométrie symplectique et de contact*, p. 1-50.
[3] S. Smale, Regular Curves on Riemannian Manifolds, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 87, 1958, p. 492-512.
[4] W. Boothby, On the Integral Curves of a Linear Differential Form of Maximum Rank, *Math. Ann.*, 177, 1968, p. 1-104.
[5] A. Weinstein, On the Hypotheses of Rabinowitz' Periodic Orbit Theorems, *J. Diff. Equ.*, 33, 1979, p. 353-358.

Département de Mathématiques, École Polytechnique, 91128 *Palaiseau Cedex.*