Graphes universels avec sous-graphes exclus

Gregory Cherlin

Paris

10 mai, 2005

Thèmes

- Si on considère des classes de graphes finis, globalement:
- Est-ce qu'on peut faire une *théorie de classification* dans le sens de Shelah dans ce contexte?
- "Simple/complexe"

Par exemple:

- L'inclusion est-elle un "bon quasi-ordre" sur la classe?
- Existe-t-il une limite dénombrable universelle?

Décidable??

L'étude de la 2ème question commence avec des résultats très explicites (Komjáth/Füredi/...) Puis on est passé par la théorie des modèles, pour revenir a la combinatoire ...

I

Le problème et quelques résultats

Graphes C-libres universels

Existe-t-il un graphe C-*libre*, dénombrable, universel?

Exemples

1. Graphe de Rado (sans C)
2. K_n-libre (Fraïssé)
3. P_n-libre [KMP '88]
4. Noeud-papillon-libre [K99] et d'autres "2-bouquets"
5. P_n^+ (Tallgren)

Non-Exemples

1. C_4-libre
2. $K_{m,n}$-libre [KP '84]
3. C_n-libre [CS]
4. C-libre (2-connexe, incomplet) [FK]
5. T-libre, arbre touffu [CS]
6. flèche-libre [GK] $>\!\!-\!\!-\!\!>$

Observations

Cas positifs

- Peu . . . mais avec des mèthodes variées
  Théorèmes de Structure; Amalgamation, . . .

- Et très souvent:
  Théories $\aleph_0$*-catégoriques*

Cas négatifs

- Analyse Uniforme,
  Essentiellement modèle-théorique: “acl”

Thèse La catégoricité en $\aleph_0$ est fondamentale, tant du point de vue théorique que pratique.

Le Contexte Général

$\mathcal{C}$: Collection *finie*: graphes connexes (contraintes)
Graphes $\mathcal{C}$-libres (dénombrables)
$\exists$? Un universel

2 Problèmes

I. 1 contrainte: *liste explicite* des “bons”;

II. Cas général: *?Décidabilité?*

Vers l'Indécidabilité

Généralisation: Structures relationnels finies

Codage:
Graphes avec un coloriage des sommets avec 2 couleurs

IIA Est-ce que ce probléme est décidable en toute généralité?

IIB Est-ce que le cas de 2 couleurs peut être réduit au problème sans coloriage?

Vers la décidabilité

On connait deux types de cas positifs:

1. Des graphes qui ressemblent à des *chemins*;
2. Des classes de contraintes *fermés par homomorphisme*

Est-il possible que le cas général mélange ces 2 principes?

Cas positifs connus, à une contrainte

1. Un chemin $P_n \in \mathcal{C}$;
2. Un chemin augmenté $P_n^+ \in \mathcal{C}$;
3. $K_3 \underset{\cdot}{+} K_3 \underset{\cdot}{+} P_n$, $K_m \underset{\cdot}{+} P_n$
4. Bouquets $K_m \underset{\cdot}{+} K_n$, $\inf(m,n) \leq 5$ et $(m,n) \neq (5,5)$
5. Sans doute quelques combinaisons des 2 derniers;
6. Une classe $\mathcal{C}$ quelconque fermé par *homomorphisme*
7. ...ou plus généralement, la réunion dúne bonne classe avec une classe fermé par homomorphisme

Exemple

$\mathcal{C}$ une collection finie de *circuits*

Il y a un graphe universel $\mathcal{C}$-libre

$\Longleftrightarrow$

$\mathcal{C}$ contient tous les *circuits impairs* jusqu'à une certaine longueur $2N+1$, et aucun circuit pair

Exemple

Plus simplement

$\mathcal{C}$ une collection finie de *circuits*

Il y a un graphe universel $\mathcal{C}$-libre

$$\Longleftrightarrow$$

$\mathcal{C}$ est fermé par homomorphisme

Exemple

Plus généralement

$\mathcal{C}$ une collection finie de *blocs incomplets*

Il y a un graphe universel $\mathcal{C}$-libre

$$\Longleftrightarrow$$

$\mathcal{C}$ est fermé par homomorphisme

II

Les bases théoriques

Contexte modèle théorique

$\mathcal{G}_\mathcal{C}$: Graphes $\mathcal{C}$-libres
$\mathcal{E}_\mathcal{C}$: Graphes $\mathcal{C}$-libres *existentiellement clos*

Un mauvais example:

$\mathcal{C}$: tous les circuits
$\mathcal{E}_\mathcal{C}$: Arbres, avec ramification partout infinie

Ce n'est pas une classe élémentaire!

Théorie

Théorème
Soit $\mathcal{C}$ un ensemble *fini* de graphes finis et connexes. Alors la classe $\mathcal{E}_{\mathcal{C}}$ est axiomatisable et sa théorie est complète.

Corollaire Sont équivalents:

1. Il y un graphe $\mathcal{C}$-libre dénombrable et universel;
2. Il y a un graphe $\aleph_0$-saturé en $\mathcal{E}_{\mathcal{C}}$;
3. La théorie de $\mathcal{E}_{\mathcal{C}}$ est "petite"
   ($|S_n| \leq \aleph_0$ pour tout n).

Théorie

Théorème
Soit $\mathcal{C}$ un ensemble *fini* de graphes finis et connexes. Alors la classe $\mathcal{E}_{\mathcal{C}}$ est axiomatisable et sa théorie est complète.

Corollaire Sont équivalents:

1. Il y un graphe $\mathcal{C}$-libre dénombrable et universel;
2. Il y a un graphe $\aleph_0$-saturé en $\mathcal{E}_{\mathcal{C}}$;
3. La théorie de $\mathcal{E}_{\mathcal{C}}$ est “petite”
   ($|S_n| \leq \aleph_0$ pour tout n).

Observation Typiquement, il y a les extrèmes:
soit $\exists n\, |S_n| = 2^{\aleph_0}$, soit S_n est fini pour tout n.

Théorie

Théorème
Soit $\mathcal{C}$ un ensemble *fini* de graphes finis et connexes. Alors la classe $\mathcal{E}_{\mathcal{C}}$ est axiomatisable et sa théorie est complète.

Corollaire Sont équivalents:

1. Il y un graphe $\mathcal{C}$-libre dénombrable et universel;
2. Il y a un graphe $\aleph_0$-saturé en $\mathcal{E}_{\mathcal{C}}$;
3. La théorie de $\mathcal{E}_{\mathcal{C}}$ est "petite"
   ($|S_n| \leq \aleph_0$ pour tout n).

Observation Typiquement, il y a les extrèmes:
soit $\exists n \, |S_n| = 2^{\aleph_0}$, soit S_n est fini pour tout n.
Mais les chemins augmentés fournissent un contre-exemple.

Variante

$*$ Peut-on déterminer les classes $\mathcal{C}$ telles que $\mathcal{E}_{\mathcal{C}}$ soit $\aleph_0$-catégorique?

I* $|\mathcal{C}| = 1$—solution explicite?

II* Cas général—Décidabilité?

Variante

$*$ Peut-on déterminer les classes $\mathcal{C}$ telles que $\mathcal{E}_{\mathcal{C}}$ soit $\aleph_0$-catégorique?

I* $|\mathcal{C}| = 1$—solution explicite?

II* Cas général—Décidabilité?

Thèse

Cette question contient le noyau purement combinatoire du problème.

Le contenu combinatoire

L'opérateur acl dans $\mathcal{E}_{\mathcal{C}}$

$\mathrm{acl(A)}$: La réunion des ensembles A-définissables finis.

Theorem Sont équivalents:

1. $\mathcal{E}_{\mathcal{C}}$ est $\aleph_0$-catégorique;
2. $\mathcal{E}_{\mathcal{C}}$ est *localement fini:*
   pour A fini, $\mathrm{acl(A)}$ est fini.

Le contenu combinatoire

L'opérateur acl dans $\mathcal{E}_\mathcal{C}$

$\mathrm{acl(A)}$: La réunion des ensembles A-définissables finis.

Theorem Sont équivalents:

1. $\mathcal{E}_\mathcal{C}$ est $\aleph_0$-catégorique;
2. $\mathcal{E}_\mathcal{C}$ est *localement fini:*
   pour A fini, $\mathrm{acl(A)}$ est fini.

"Contrexemple":
Une suite de classes d'équivalence
(relation de successeur $\rightarrow$, relation d'équivalence $\sim$)
S_2 est infini, mais acl est triviale.

Exercice: ceci (ou plutôt cela) n'est pas un contrexemple

Lemme de finitude

Soit A algébriquement clos et fini.
Soit $k = \max(|C| : C \in \mathcal{C})$,

Alors, le type de A est déterminé par
son type existentiel jusqu'à k quanteurs

Applications

1. Si $\mathcal{C}$ est fermé par homomorphisme, alors $\mathrm{acl}(\mathrm{A}) = \mathrm{A}$ identiquement;
   donc, $\mathcal{E}_{\mathcal{C}}$ est $\aleph_0$-catégorique.
2. Si $\mathcal{E}_{\mathcal{C}}$ est $\aleph_0$-catégorique, et $\mathcal{C}'$ est fermé par homomorphisme, alors $\mathcal{E}_{\mathcal{C}\cup\mathcal{C}'}$ est $\aleph_0$-catégorique, avec le même opérateur acl (pas forcément les mêmes types!)
3. *Clôture unaire*
   Si les contraintes $\mathcal{C}$ sont des graphes *solides*, alors acl est *unaire*: $\mathrm{acl}(\mathrm{A}) = \bigcup_{\mathrm{a}\in\mathrm{A}} \mathrm{acl}(\mathrm{a})$.
4. Noeud-Papillon N (bouquet de 2 triangles)
   $|\mathrm{acl}(\mathrm{a})| \leq 4$ (par un calcul direct) et donc
   $\mathcal{E}_N$ est $\aleph_0$-catégorique.

Conjectures

Conjecture 1
Si $\mathcal{E}_C$ est $\aleph_0$*-catégorique,* alors C est un *chemin épais* (remplacer les sommets par des graphes complets);

Conjecture 2
Si $\mathcal{E}_C$ a une petite théorie (le graphe universel existe), alors C est un *chemin augmenté épais*.

Donc en particulier *solide* (blocs complets).

Clôture par Homomorphismes

$h : G_1 \to G_2$ préserve les arêtes. (Si $h(u) = h(v)$, on a $u \not\sim v$)

$\mathcal{C}$ est *clos par homomorphismes* si:

$$C \in \mathcal{C},\, C \twoheadrightarrow C' \implies \exists C'' \in \mathcal{C}\; C'' \hookrightarrow C'$$

Théorème Sont équivalents pour $A \subseteq G \in \mathcal{E}_{\mathcal{C}}$:

1. $A \neq \mathrm{acl(A)}$ dans G
2. $\exists\, C \twoheadrightarrow C' \subseteq G$ avec $C \in \mathcal{C}$, et $C \hookrightarrow C_1' \dot{+}_A C_2'$

Preuve ($1 \implies 2$):
$G \hookrightarrow G_1 \dot{+}_A G_2$, $G_1 \simeq G_2 \simeq G$;
$C \hookrightarrow G_1 \dot{+}_A G_2 \twoheadrightarrow G_1$; image C'. ∎

Clôture par Homomorphismes

$h : G_1 \to G_2$ préserve les arêtes. (Si $h(u) = h(v)$, on a $u \not\sim v$)

$\mathcal{C}$ est *clos par homomorphismes* si:

$$C \in \mathcal{C}, C \twoheadrightarrow C' \implies \exists C'' \in \mathcal{C}\ C'' \hookrightarrow C'$$

Théorème Sont équivalents pour $A \subseteq G \in \mathcal{E}_{\mathcal{C}}$:

1. $A \neq \mathrm{acl(A)}$ dans G
2. $\exists\, C \twoheadrightarrow C' \subseteq G$ avec $C \in \mathcal{C}$, et $C \hookrightarrow C'_1 \dot{+}_A C'_2$

Corollaire:

Clôture par homomorphisme implique: $\mathrm{acl(A)} = \mathrm{A}$;
et donc catégoricité en $\aleph_0$.

Exemple: Circuits

C_{2n} se projette sur K_2—qui n'est pas un circuit.

C_{2n+1} “engendre” C_{2m+1} pour $1 \leq m \leq n$.
(Cette notion est bien définie.)

La clôture algébrique est triviale; mais la théorie est assez complexe. On sait maintenant qu'on peut déterminer qu'elle est $\aleph_0$-catégorique sans la connaître explicitement.

Pourquoi les preuves par amalgamation sont-elles plus difficiles?
—parce qu'elles déterminent les théories (jusquáu niveau de l'‘élimination des quanteurs).

III

Travaux récents et en cours

L'opérateur acl ($\mathcal{C}$ fixe)

H *libre* sur X: amalgamation sur X ne peut pas produire des éléments de $\mathcal{C}$;
Base pour H sur A (si $A \subseteq H$): X minimal tel que $A \subseteq X \subseteq H$ et H est libre sur X.
$\mathrm{cl}(A; H)$ ($A \subseteq H$):
La réunion de toutes les bases pour H sur A

Lemma $\mathrm{cl}(A; H) \subseteq \mathrm{acl}(\mathrm{A})$
Preuve: Lemme sur les Δ-systèmes

$\mathcal{F}$: $\{(A, H) : H \hookrightarrow C \in \mathcal{C}$, comme sous-graphe propre$\}$.
Théorème
1. $\mathcal{F}$-cl engendre acl;
2. $\mathcal{F}$-cl est localement fini (à chaque étape)

Problème: la longueur de l' iteration.

$\mathcal{F}$-cl

Théorème

1. $\mathcal{F}$-cl engendre acl;

2. $\mathcal{F}$-cl est localement fini.

Preuve:
2. $\mathcal{F}$-$\mathrm{cl}(A)$ est un sous-ensemble *définissable* de $\mathrm{acl}(\mathrm{A})$

1. Comme avant: sinon $h : C \hookrightarrow G_1 \underset{\cdot}{+} X G_2$; $H = h(C) \cap G_2$. $\blacksquare$

Si C est solide, la $\mathcal{F}$-clôture est engendrée par les $\mathrm{cl}(a; H)$.
(Puisque la transition de G_1 à G_2 a lieu à un seul point.)

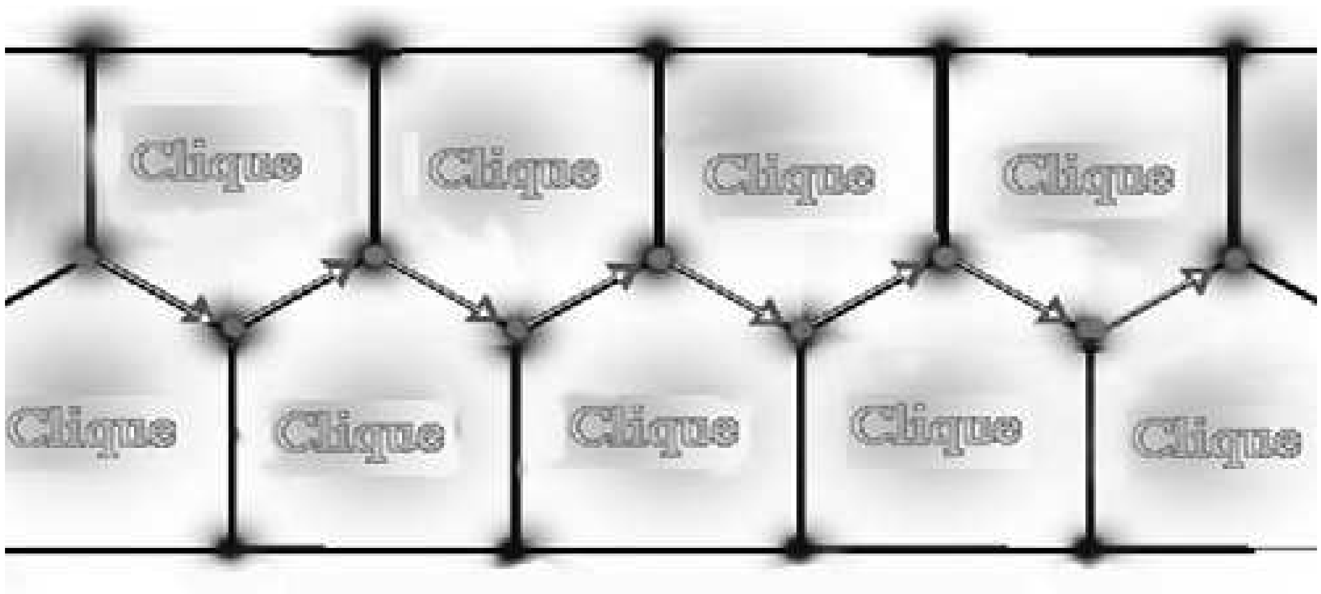
Le cas des bouquets

Rappel: un graphe universel existe pour $K_m \underset{\cdot}{+} K_n$ ssi:

- $\min(m, n) \leq 5$;
- $(m, n) \neq (5, 5)$

En particulier: $(K_5 \underset{\cdot}{+} K_6)$ admet un graphe universel, le sous-graphe induit $K_5 \underset{\cdot}{+} K_5$ n'en admet pas.

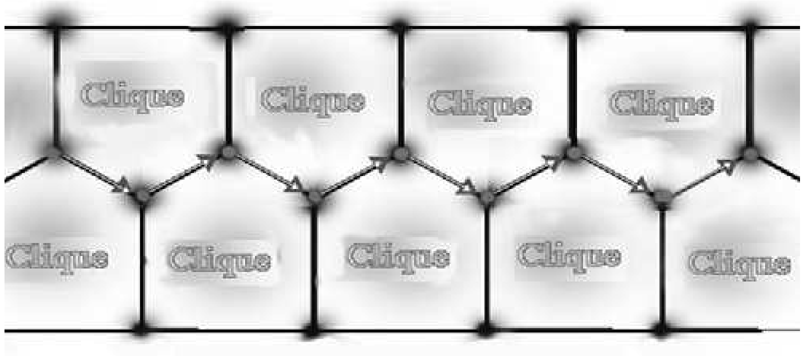
Le cas $K_5 \underset{\bullet}{+} K_5$



$(\mathbf{K_5} + \mathbf{K_5})$ - Libre

Sur le chemin central, chaque sommet est algébrique sur son prédécesseur. Les K_5 en sont les "témoins". Si on extrait un Δ-system de ces K_5, ils seront disjoints.

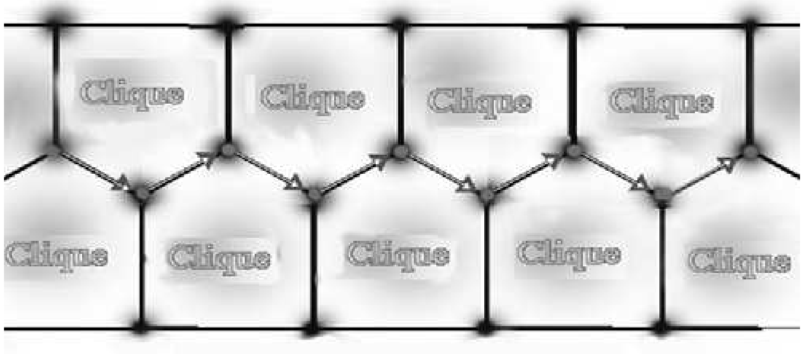
Le cas $K_5 \underset{\bullet}{+} K_n$



$(\mathbf{K}_5 + \mathbf{K}_5)$ - Libre

Chaque point sur le chemin central appartient à un K_5.

Le cas $K_5 \dot{+} K_n$

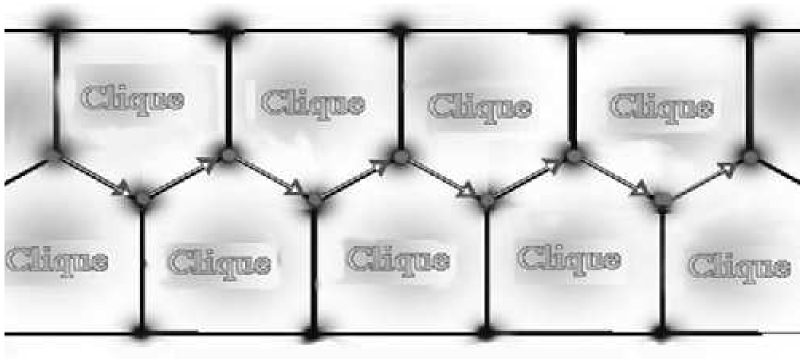


$(K_5 + K_5)$ - Libre

Chaque point sur le chemin central appartient à un K_5.

Si on veut faire la même chose avec $K_5 \dot{+} K_7$, il faut des K_7. Chaque couple de K_7 adjacents aurait au moins 4 éléments en commun.

Le cas $K_5 \underset{\bullet}{+} K_n$

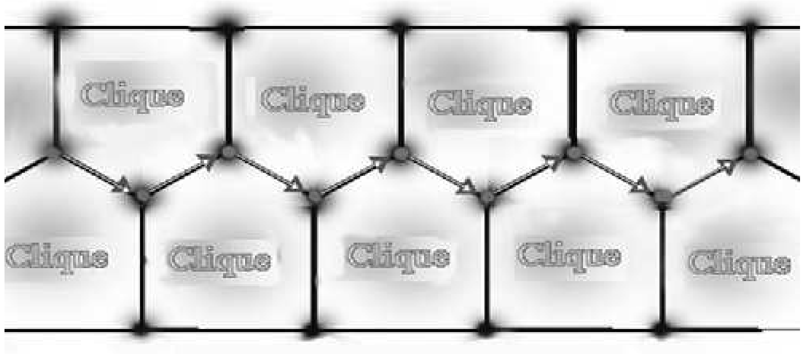


$(\mathbf{K}_5 + \mathbf{K}_5)$ - Libre

Si on veut faire la même chose avec $K_5 \underset{\bullet}{+} K_7$, il faut des K_7. Chaque couple de K_7 adjacents aurait au moins 4 éléments en commun.

Donc ils ne deviendront jamais disjoints, et un Δ-systéme aura un “coeur” non-trivial.

Le cas $K_5 \underset{\cdot}{+} K_n$



$(\mathbf{K}_5 + \mathbf{K}_5)$ - Libre

Si on veut faire la même chose avec $K_5 \underset{\cdot}{+} K_7$, il faut des K_7. Chaque couple de K_7 adjacents aurait au moins 4 éléments en commun.

Donc ils ne deviendront jamais disjoints, et un Δ-systéme aura un “coeur” non-trivial.

Pour $K_5 \underset{\cdot}{+} K_n$ ce n’est pas possible; pour $K_6 \underset{\cdot}{+} K_n$ un tel Δ-système existe. ($n \geq 6$) Le cas $K_5 \underset{\cdot}{+} K_5$ est exceptionnel.

Les Arbres (avec Shelah)

Théorème
Soit T un arbre, et supposons qu'il existe un graphe G T-libre, dénombrable, et fortement universel. Alors T est soit un chemin, soit un chemin augmenté par un arête.

Les Arbres (avec Shelah)

Théorème
Soit T un arbre, et supposons qu'il existe un graphe G T-libre, dénombrable, et fortement universel. Alors T est soit un chemin, soit un chemin augmenté par un arête.

Une idée simple et forte: *l'élagage*.
On *élague* un arbre en enlevant les sommets terminaux.
Lemma Soit T un arbre tel qu'il existe un graphe T-libre et universel (fortement ou faiblement), et soit T' l'arbre élagué. Alor il existe un graphe T'-libre et universel.

Les Arbres (avec Shelah)

Théorème
Soit T un arbre, et supposons qu'il existe un graphe G T-libre, dénombrable, et fortement universel. Alors T est soit un chemin, soit un chemin augmenté par un arête.

Une idée simple et forte: *l'élagage*.
On *élague* un arbre en enlevant les sommets terminaux.
Lemma Soit T un arbre tel qu'il existe un graphe T-libre et universel (fortement ou faiblement), et soit T' l'arbre élagué. Alor il existe un graphe T'-libre et universel.
Preuve:
Dans le graphe G $\neg T$-universel on prend le sous-graphe $\check{G}$ induit sur les sommets "florissants".

Les Arbres (avec Shelah)

Théorème
Soit T un arbre, et supposons qu'il existe un graphe G T-libre, dénombrable, et fortement universel. Alors T est soit un chemin, soit un chemin augmenté par un arête.

Une idée simple et forte: *l'élagage*.
On *élague* un arbre en enlevant les sommets terminaux.
Lemma Soit T un arbre tel qu'il existe un graphe T-libre et universel (fortement ou faiblement), et soit T' l'arbre élagué. Alor il existe un graphe T'-libre et universel.

On peut élaguer un graphe quelconque en enlevant des *blocs terminaux*—ou une seule sorte de bloc terminal (minimal).

Un exemple

Füredi-Komjàth 1997:
Si un arbre T possède un seul sommet de degré maximal, et en plus il est adjacent à une feuille de lárbre, il n'y a pas de graphe T-libre universel

Corollaire.
Si un arbre T possède un seul sommet de degré maximal d, et si $d \geq 4$, il n y a pas de graphe T-libre universel.

Preuve: par élagage on arrive au cas traité antérieurement.

Résumé

- $\mathrm{acl}_{\mathcal{C}}$: la clôture “algébrique” dans une catégorie de graphes.
- Problème fondamental: quand est-ce que c’est *localement fini*? (Un problème de catégoricité en $\aleph_0$.)
- Décidable?
- L’orthodoxie actuelle:
  Une contrainte: très probablement
  Cas général: peut-être; sauf s’il y a encore des bons exemples à découvrir.
- La structure sous-jacente se révèle très doucement.
- Depuis un bon moment on renonce à connaître les théories *(théorèmes de structure)*; on cherche seulement à borner la complexité de acl