

KEY TO THE MAASS-SELBERG RELATIONS FOR $SL_3(R)$

$$\lambda_1 = (it_1 + \varepsilon_1, it_2 + \varepsilon_2, it_3 + \varepsilon_3)$$

$$\lambda_2 = (-it_1, -it_2, -it_3)$$

$$s_1, s_2 \text{ permutations in } S_3$$

$$\text{Inv}(s) = \{(i, j) \mid i < j, s(i) > s(j)\}$$

$$\alpha_1^\vee = (1, -1, 0)$$

$$\alpha_2^\vee = (0, 1, -1)$$

Sample Box:

s_2

$$s_1 \begin{array}{cc} s_1 \lambda_1 + s_2 \lambda_2 & \text{Inv}(s_2) \\ & \\ & (s_1 \lambda_1 + s_2 \lambda_2)(\alpha_1^\vee) \\ \text{Inv}(s_1) & \\ & (s_1 \lambda_1 + s_2 \lambda_2)(\alpha_2^\vee) \end{array}$$

$e\lambda_1 = (it_1 + \varepsilon_1, it_2 + \varepsilon_2, it_3 + \varepsilon_3)$	$e\lambda_2 = (-it_1, -it_2, -it_3)$
$(12)\lambda_1 = (it_2 + \varepsilon_2, it_1 + \varepsilon_1, it_3 + \varepsilon_3)$	$(12)\lambda_2 = (-it_2, -it_1, -it_3)$
$(13)\lambda_1 = (it_3 + \varepsilon_3, it_2 + \varepsilon_2, it_1 + \varepsilon_1)$	$(13)\lambda_2 = (-it_3, -it_2, -it_1)$
$(23)\lambda_1 = (it_1 + \varepsilon_1, it_3 + \varepsilon_3, it_2 + \varepsilon_2)$	$(23)\lambda_2 = (-it_1, -it_3, -it_2)$
$(123)\lambda_1 = (it_3 + \varepsilon_3, it_1 + \varepsilon_1, it_2 + \varepsilon_2)$	$(123)\lambda_2 = (-it_3, -it_1, -it_2)$
$(321)\lambda_1 = (it_2 + \varepsilon_2, it_3 + \varepsilon_3, it_1 + \varepsilon_1)$	$(321)\lambda_2 = (-it_2, -it_3, -it_1)$

Inner Product Formula.

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma \backslash G/K} \Lambda^c E(g, \lambda_1) \Lambda^c E(g, \lambda_2) dg \\ &= \text{const.} \sum_{s_1, s_2 \in S_3} \frac{e^{(s_1 \lambda_1 + s_2 \lambda_2)(c, 0, -c)}}{(s_1 \lambda_1 + s_2 \lambda_2)(\alpha_1^\vee)(s_1 \lambda_1 + s_2 \lambda_2)(\alpha_2^\vee)} \times \\ & \prod_{(j,k) \in \text{Inv } s_1} \frac{Z(it_j - it_k + \varepsilon_j - \varepsilon_k)}{Z(1 + it_j - it_k + \varepsilon_j - \varepsilon_k)} \prod_{(j,k) \in \text{Inv } s_2} \frac{Z(it_k - it_j)}{Z(1 + it_k - it_j)}, \\ & Z(s) = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\frac{s}{2}) \zeta^*(s)}{\Gamma(\frac{s+1}{2}) \zeta(s+1)} \end{aligned}$$

These boxes describe the ingredients of the 36 terms

$$s_2 = e$$

$$s_2 = (12)$$

$$s_1 = e \quad \left[\begin{array}{cc} \left[\begin{array}{c} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{array} \right] & \emptyset \\ \emptyset & \begin{array}{c} \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \\ \varepsilon_2 - \varepsilon_3 \end{array} \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{cc} \left[\begin{array}{c} it_1 - it_2 + \varepsilon_1 \\ it_2 - it_1 + \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{array} \right] & 12 \\ \emptyset & \begin{array}{c} 2it_1 - 2it_2 + \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \\ it_2 - it_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 \end{array} \end{array} \right]$$

$$s_1 = (12) \quad \left[\begin{array}{cc} \left[\begin{array}{c} it_2 - it_1 + \varepsilon_2 \\ it_1 - it_2 + \varepsilon_1 \\ \varepsilon_3 \end{array} \right] & \emptyset \\ 12 & \begin{array}{c} 2it_2 - 2it_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \\ it_1 - it_2 + \varepsilon_1 - \varepsilon_3 \end{array} \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{cc} \left[\begin{array}{c} \varepsilon_2 \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_3 \end{array} \right] & 12 \\ 12 & \begin{array}{c} \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \\ \varepsilon_1 - \varepsilon_3 \end{array} \end{array} \right]$$

$$s_1 = (13) \quad \left[\begin{array}{cc} \left[\begin{array}{c} it_3 - it_1 + \varepsilon_3 \\ \varepsilon_2 \\ it_1 - it_3 + \varepsilon_1 \end{array} \right] & \emptyset \\ \begin{array}{cc} 12 & 13 \\ 23 & \end{array} & \begin{array}{c} it_3 - it_1 + \varepsilon_3 - \varepsilon_2 \\ it_3 - it_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \end{array} \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{cc} \left[\begin{array}{c} it_3 - it_2 + \varepsilon_3 \\ it_2 - it_1 + \varepsilon_2 \\ it_1 - it_3 + \varepsilon_1 \end{array} \right] & 12 \\ \begin{array}{cc} 12 & 13 \\ 23 & \end{array} & \begin{array}{c} it_1 + it_3 - 2it_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_2 \\ it_2 + it_3 - 2it_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \end{array} \end{array} \right]$$

$$s_1 = (23) \quad \left[\begin{array}{cc} \left[\begin{array}{c} \varepsilon_1 \\ it_3 - it_2 + \varepsilon_3 \\ it_2 - it_3 + \varepsilon_2 \end{array} \right] & \emptyset \\ 23 & \begin{array}{c} it_2 - it_3 + \varepsilon_1 - \varepsilon_3 \\ 2it_3 - 2it_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_2 \end{array} \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{cc} \left[\begin{array}{c} it_1 - it_2 + \varepsilon_1 \\ it_3 - it_1 + \varepsilon_3 \\ it_2 - it_3 + \varepsilon_2 \end{array} \right] & 12 \\ 23 & \begin{array}{c} 2it_1 - it_2 - it_3 + \varepsilon_1 - \varepsilon_3 \\ 2it_3 - it_1 - it_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_2 \end{array} \end{array} \right]$$

$$s_2 = e$$

$$s_2 = (12)$$

$s_1 = (123)$	$\begin{bmatrix} it_3 - it_1 + \varepsilon_3 \\ it_1 - it_2 + \varepsilon_1 \\ it_2 - it_3 + \varepsilon_2 \end{bmatrix}$	$\emptyset$	$\begin{bmatrix} it_3 - it_2 + \varepsilon_3 \\ \varepsilon_1 \\ it_2 - it_3 + \varepsilon_2 \end{bmatrix}$	12
	13	$it_2 + it_3 - 2it_1 + \varepsilon_3 - \varepsilon_1$	13	$it_3 - it_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_1$
	23	$it_1 + it_3 - 2it_2 + \varepsilon_1 - \varepsilon_2$	23	$it_3 - it_2 + \varepsilon_1 - \varepsilon_2$

$s_1 = (321)$	$\begin{bmatrix} it_2 - it_1 + \varepsilon_2 \\ it_3 - it_2 + \varepsilon_3 \\ it_1 - it_3 + \varepsilon_1 \end{bmatrix}$	$\emptyset$	$\begin{bmatrix} \varepsilon_2 \\ it_3 - it_1 + \varepsilon_3 \\ it_1 - it_3 + \varepsilon_1 \end{bmatrix}$	12
	12	$2it_2 - it_1 - it_3 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3$	12	$it_1 - it_3 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3$
	13	$2it_3 - it_1 - it_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_1$	13	$2it_3 - 2it_1 + \varepsilon_3 - \varepsilon_1$

$$s_2 = (13)$$

$$s_2 = (23)$$

$$s_1 = e$$

$\begin{bmatrix} it_1 - it_3 + \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ it_3 - it_1 + \varepsilon_3 \end{bmatrix} \quad 12 \ 13 \ 23$	$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ it_2 - it_3 + \varepsilon_2 \\ it_3 - it_2 + \varepsilon_3 \end{bmatrix} \quad 23$
$\emptyset \quad \begin{matrix} it_1 - it_3 + \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \\ it_1 - it_3 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 \end{matrix}$	$\emptyset \quad \begin{matrix} it_3 - it_2 + \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \\ 2it_2 - 2it_3 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 \end{matrix}$

$$s_1 = (12)$$

$\begin{bmatrix} it_2 - it_3 + \varepsilon_2 \\ it_1 - it_2 + \varepsilon_1 \\ it_3 - it_1 + \varepsilon_3 \end{bmatrix} \quad 12 \ 13 \ 23$	$\begin{bmatrix} it_2 - it_1 + \varepsilon_2 \\ it_1 - it_3 + \varepsilon_1 \\ it_3 - it_2 + \varepsilon_3 \end{bmatrix} \quad 23$
$12 \quad \begin{matrix} 2it_2 - it_1 - it_3 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \\ 2it_1 - it_2 - it_3 + \varepsilon_1 - \varepsilon_3 \end{matrix}$	$12 \quad \begin{matrix} it_2 + it_3 - 2it_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \\ it_1 + it_2 - 2it_3 + \varepsilon_1 - \varepsilon_3 \end{matrix}$

$$s_1 = (13)$$

$\begin{bmatrix} \varepsilon_3 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_1 \end{bmatrix} \quad 12 \ 13 \ 23$	$\begin{bmatrix} it_3 - it_1 + \varepsilon_3 \\ it_2 - it_3 + \varepsilon_2 \\ it_1 - it_2 + \varepsilon_1 \end{bmatrix} \quad 23$
$12 \ 13 \ 23 \quad \begin{matrix} \varepsilon_3 - \varepsilon_2 \\ \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 12 \ 13 \\ 23 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 2it_3 - it_1 - it_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_2 \\ 2it_2 - it_3 - it_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \end{matrix}$

$$s_1 = (23)$$

$\begin{bmatrix} it_1 - it_3 + \varepsilon_1 \\ it_3 - it_2 + \varepsilon_3 \\ it_2 - it_1 + \varepsilon_2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 12 \ 13 \\ 23 \end{matrix}$	$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix} \quad 23$
$23 \quad \begin{matrix} it_2 + it_1 - 2it_3 + \varepsilon_1 - \varepsilon_3 \\ it_1 + it_3 - 2it_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_2 \end{matrix}$	$23 \quad \begin{matrix} \varepsilon_1 - \varepsilon_3 \\ \varepsilon_3 - \varepsilon_2 \end{matrix}$

$$s_2 = (13)$$

$$s_2 = (23)$$

$$s_1 = (123) \quad \left[\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} \varepsilon_3 \\ it_1 - it_2 + \varepsilon_1 \\ it_2 - it_1 + \varepsilon_2 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 12 \ 13 \ 23 \\ \\ 13 \ 23 \\ 23 \end{array} \\ \begin{array}{cc} & it_2 - it_1 + \varepsilon_3 - \varepsilon_1 \\ & 2it_1 - 2it_2 + \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \end{array} & \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} it_3 - it_1 + \varepsilon_3 \\ it_1 - it_3 + \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 23 \\ \\ 13 \ 23 \end{array} \\ \begin{array}{cc} & 2it_3 - 2it_1 + \varepsilon_3 - \varepsilon_1 \\ & it_1 - it_3 + \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \end{array} \end{array} \right.$$

$$s_1 = (321) \quad \left[\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} it_2 - it_3 + \varepsilon_2 \\ it_3 - it_2 + \varepsilon_3 \\ \varepsilon_1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 12 \ 13 \ 23 \\ \\ 12 \ 13 \\ 13 \end{array} \\ \begin{array}{cc} & 2it_2 - 2it_3 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 \\ & it_3 - it_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_1 \end{array} & \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} it_2 - it_1 + \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ it_1 - it_2 + \varepsilon_1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 23 \\ \\ 12 \ 13 \end{array} \\ \begin{array}{cc} & it_2 - it_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 \\ & it_2 - it_1 + \varepsilon_3 - \varepsilon_1 \end{array} \end{array} \right.$$

$$s_2 = (123)$$

$$s_2 = (321)$$

$s_1 = e$	$\begin{bmatrix} it_1 - it_3 + \varepsilon_1 \\ it_2 - it_1 + \varepsilon_2 \\ it_3 - it_2 + \varepsilon_3 \end{bmatrix}$	13 23	$\begin{bmatrix} it_1 - it_2 + \varepsilon_1 \\ it_2 - it_3 + \varepsilon_2 \\ it_3 - it_1 + \varepsilon_3 \end{bmatrix}$	12 13
	$\emptyset$	$2it_1 - it_2 - it_3 + \varepsilon_1 - \varepsilon_2$ $2it_2 - it_1 - it_3 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3$	$\emptyset$	$it_3 + it_1 - 2it_2 + \varepsilon_1 - \varepsilon_2$ $it_1 + it_2 - 2it_3 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3$

$s_1 = (12)$	$\begin{bmatrix} it_2 - it_3 + \varepsilon_2 \\ \varepsilon_1 \\ it_3 - it_2 + \varepsilon_3 \end{bmatrix}$	13 23	$\begin{bmatrix} \varepsilon_2 \\ it_1 - it_3 + \varepsilon_1 \\ it_3 - it_1 + \varepsilon_3 \end{bmatrix}$	12 13
	12	$it_2 - it_3 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1$ $it_2 - it_3 + \varepsilon_1 - \varepsilon_3$	12	$it_3 - it_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1$ $2it_1 - 2it_3 + \varepsilon_1 - \varepsilon_3$

$s_1 = (13)$	$\begin{bmatrix} \varepsilon_3 \\ it_2 - it_1 + \varepsilon_2 \\ it_1 - it_2 + \varepsilon_1 \end{bmatrix}$	13 23	$\begin{bmatrix} it_3 - it_2 + \varepsilon_3 \\ it_2 - it_3 + \varepsilon_2 \\ \varepsilon_1 \end{bmatrix}$	12 13
	12 13 23	$it_1 - it_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_2$ $2it_2 - 2it_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1$	12 13 23	$2it_3 - 2it_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_2$ $it_2 - it_3 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1$

$s_1 = (23)$	$\begin{bmatrix} it_1 - it_3 + \varepsilon_1 \\ it_3 - it_1 + \varepsilon_3 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix}$	13 23	$\begin{bmatrix} it_1 - it_2 + \varepsilon_1 \\ \varepsilon_3 \\ it_2 - it_1 + \varepsilon_2 \end{bmatrix}$	12 13
	23	$2it_1 - 2it_3 + \varepsilon_1 - \varepsilon_3$ $it_3 - it_1 + \varepsilon_3 - \varepsilon_2$	23	$it_1 - it_2 + \varepsilon_1 - \varepsilon_3$ $it_1 - it_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_2$

$$s_2 = (123)$$

$$s_2 = (321)$$

$s_1 = (123)$	<table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;"> $\begin{bmatrix} \varepsilon_3 \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix}$ </td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">13 23</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">13 23</td> <td style="padding: 5px;"> $\varepsilon_3 - \varepsilon_1$ $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$ </td> </tr> </table>	$\begin{bmatrix} \varepsilon_3 \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix}$	13 23	13 23	$\varepsilon_3 - \varepsilon_1$ $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$	<table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;"> $\begin{bmatrix} it_3 - it_2 + \varepsilon_3 \\ it_1 - it_3 + \varepsilon_1 \\ it_2 - it_1 + \varepsilon_2 \end{bmatrix}$ </td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">12 13</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">13 23</td> <td style="padding: 5px;"> $2it_3 - it_1 - it_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_1$ $2it_1 - it_3 - it_2 + \varepsilon_1 - \varepsilon_2$ </td> </tr> </table>	$\begin{bmatrix} it_3 - it_2 + \varepsilon_3 \\ it_1 - it_3 + \varepsilon_1 \\ it_2 - it_1 + \varepsilon_2 \end{bmatrix}$	12 13	13 23	$2it_3 - it_1 - it_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_1$ $2it_1 - it_3 - it_2 + \varepsilon_1 - \varepsilon_2$
$\begin{bmatrix} \varepsilon_3 \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix}$	13 23									
13 23	$\varepsilon_3 - \varepsilon_1$ $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$									
$\begin{bmatrix} it_3 - it_2 + \varepsilon_3 \\ it_1 - it_3 + \varepsilon_1 \\ it_2 - it_1 + \varepsilon_2 \end{bmatrix}$	12 13									
13 23	$2it_3 - it_1 - it_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_1$ $2it_1 - it_3 - it_2 + \varepsilon_1 - \varepsilon_2$									
$s_1 = (321)$	<table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;"> $\begin{bmatrix} it_2 - it_3 + \varepsilon_2 \\ it_3 - it_1 + \varepsilon_3 \\ \varepsilon_1 \end{bmatrix}$ </td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">13 23</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">12 13</td> <td style="padding: 5px;"> $it_1 + it_2 - 2it_3 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3$ $it_3 - it_1 + \varepsilon_3 - \varepsilon_1$ </td> </tr> </table>	$\begin{bmatrix} it_2 - it_3 + \varepsilon_2 \\ it_3 - it_1 + \varepsilon_3 \\ \varepsilon_1 \end{bmatrix}$	13 23	12 13	$it_1 + it_2 - 2it_3 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3$ $it_3 - it_1 + \varepsilon_3 - \varepsilon_1$	<table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;"> $\begin{bmatrix} \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_1 \end{bmatrix}$ </td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">12 13</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">12 13</td> <td style="padding: 5px;"> $\varepsilon_2 - \varepsilon_3$ $\varepsilon_3 - \varepsilon_1$ </td> </tr> </table>	$\begin{bmatrix} \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_1 \end{bmatrix}$	12 13	12 13	$\varepsilon_2 - \varepsilon_3$ $\varepsilon_3 - \varepsilon_1$
$\begin{bmatrix} it_2 - it_3 + \varepsilon_2 \\ it_3 - it_1 + \varepsilon_3 \\ \varepsilon_1 \end{bmatrix}$	13 23									
12 13	$it_1 + it_2 - 2it_3 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3$ $it_3 - it_1 + \varepsilon_3 - \varepsilon_1$									
$\begin{bmatrix} \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_1 \end{bmatrix}$	12 13									
12 13	$\varepsilon_2 - \varepsilon_3$ $\varepsilon_3 - \varepsilon_1$									